CB 24

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA UTILIZANDO LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL COMO LÍMITE DE SUCESIONES

Oscar E. ARES, Stella Nora GATICA, Rita K. OLGUIN

Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales - Universidad Nacional de San Luis - Argentina
oares@fices.unsl.edu.ar oscareares@gmail.com rkolguin@fices.unsl.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Alumnos de Ingeniería, integral definida, nuevas tecnologías, sucesiones.

RESUMEN

En este trabajo presentamos una propuesta didáctica para la enseñanza del tema Integral definida para alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería en la asignatura Análisis Matemático I. En esta secuencia utilizamos la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface).

El concepto de integral definida es utilizado, para determinar el valor del área limitada por curvas y rectas. Tradicionalmente, para comenzar a explicar este concepto, el profesor, dibuja en el pizarrón la zona a determinar su área, subdividiendo los intervalos y encontrando el área buscada, para lo cual introduce el concepto de integral definida. En la secuencia que presentamos, es el alumno, utilizando la computadora, quien va subdividiendo el intervalo, visualizando el área buscada.

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la asignatura Análisis Matemático I, el acercamiento didáctico que se sigue en los programas de estudio y en los libros de texto es en esencia "tradicional". Es decir, básicamente se exponen los métodos de resolución de los distintos conceptos mediante un procedimiento algorítmico y se continúa con ejercicios cuya complejidad crece en forma gradual. De acuerdo con Contreras (2000), al desarrollar un tema de Análisis, un profesor se enfrenta a conceptos que por su propia naturaleza, son problemáticos en sí mismos, lo que hace desplazarse hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar, dejando de lado los problemas característicos de dicha asignatura.

En efecto, en la enseñanza elemental del Análisis Matemático se otorga gran importancia a los tratamientos tipo cálculo: la composición de dos o más funciones, el cálculo de derivadas, el cálculo de integrales, etc. También se ha comprobado que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y a evaluar sobre las competencias adquiridas en este dominio (Artigue, 1995).

Esta situación, si bien en principio es aceptable, genera una serie de problemas en asignaturas de la especialidad, en donde el uso que se le da a los conceptos cumple con objetivos muy diferentes. Diversas investigaciones han detectado importantes dificultades en los estudiantes en el campo conceptual del Análisis. Tal como asegura Hitt (1998), los alumnos de una carrera de Ingeniería, después de llevar un curso de Cálculo, no logran resolver problemas no rutinarios. Este autor sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo de manera creativa. Además, complementa esta afirmación estableciendo que el fracaso de estos estudiantes se debe a la carencia de articulación entre representaciones provocando, tal como él expresa: "*que el alumno camine a ciegas*" en el sistema algebraico desarrollando algoritmos sin una idea clara del objetivo final perseguido.

En cuanto al concepto de integral definida, desde su origen, esta noción ha respondido a la necesidad de mejorar los métodos de medición de áreas subtendidas bajo líneas y superficies curvas. La técnica de integración se desarrolló sobre todo a partir del siglo XVII, paralelamente a los avances que tuvieron lugar en las teorías sobre derivadas y en el cálculo diferencial.

En la docencia, la integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas.

Para la enseñanza de este concepto, hace tiempo que se viene constatando que los aspectos teóricos relacionados con esta noción, tal como aparecen por ejemplo en la mayoría de textos resultan demasiados complejos para muchos de nuestros alumnos, la mayoría de los cuales no entiende el porque del enorme esfuerzo deductivo al que, de pronto se les somete. Por otro lado, fuera de las aplicaciones directas del cálculo de áreas y volúmenes, no aprenden a reconocer cuándo el cálculo de una magnitud requiere de una integración.

Lloren J. L. y Santoja F. (1997) analizan los errores de los alumnos las que encuadran en tres categorías:

1. Los estudiantes identifican “integral” con “primitiva”.
2. Las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no se puede aplicar.
3. No se integra el concepto de área con el de integral.

Diversas investigaciones (Llorens y Santoja, 1997, Mundy, 1984) muestran que los estudiantes no realizan una unión adecuada entre el concepto de área y el de integral definida. En ellos persiste una interpretación algebraica de la integral, por lo que la regla de Barrow se les presenta como una interpretación geométrica de la integral como si fuera igual que el caso de la tangente como interpretación geométrica de la derivada. Posiblemente este hecho se deba a que en los libros de texto se abusa del formalismo cuando se refiere al concepto de integral.

Como uno de los aspectos más importantes en las investigaciones en didáctica de la matemática es el análisis de las deficiencias que detectamos como profesores universitarios en los estudiantes, el presente trabajo se refiere a este aspecto a tener en cuenta, en los distintos registros de representación semiótica (Duval, 1998), al momento de elaborar propuestas didácticas que contribuyan a superarlos.

PLANTEO DEL PROBLEMA

El desarrollo de este trabajo tiene que ver con el interés por comprender y ayudar a resolver los problemas de formación matemática que presentan los estudiantes en cálculo diferencial e integral. En este contexto, las dificultades en la comprensión del concepto de integración como límite de una sucesión de sumas parciales son particularmente notables.

MARCO TEORICO

Según Brousseau (1983) quien establece que una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es una solución de un problema. Tales problemas, junto con las restricciones a las que la noción responde, constituyen a significación de la noción.

Desde otra perspectiva la noción de concep-image, inicialmente introducida por Tall y Vinner (1981), establece que el estudiante decide sobre la base de la imagen conceptual que ha construida y que es la estructura cognitiva total que es asociada con el concepto, el cual incluye <u>todas las imágenes mentales y propiedades y procesos</u> asociados.

Desde la distinción entre la imagen del concepto y la definición del concepto de Tall y Vinner (1981), Tall (1991) considera que la causa de muchos obstáculos responde al principio de extensión genérica, el cual justifica sobradamente la necesidad de diseñar cuidadosamente un currículo que evite la aparición de estos obstáculos: ‘*Si un individuo trabaja en un contexto limitado en el cual todos los ejemplos que aparecen tienen cierta característica, entonces, con la ausencia de contraejemplos, la mente asume implícitamente en otros contextos estas mismas características conocidas..*

Ahora bien, la práctica educativa nos dice que es posible que la estructura subyacente en un esquema no siempre sea coherente y, por el contrario, coexistan, inconsciente o conscientemente, ideas inconsistentes (considerar compatible una proposición y su negación), incoherentes (respuestas en diferentes sistemas de representación contradictorias entre sí), pobres y conflictivas. Esto conduce a esquemas tematizados que no siempre funcionan de la mejor manera posible. Por ejemplo, Tall y Vinner (1981), proponen las nociones de “*concept image*” y “*concept definition*” para referirse y explicar los conflictos que existen entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos individuales utilizados para concebirlos. Y para ensanchar los límites de competencia de los estudiantes, la estructura subyacente de un esquema deben ser detectada, corregida y enriquecida. Así pues, el esquema tiene que ser desequilibrado y reconstruido. En (Clark *et al*., 1997; DeVries, 2001) se usa la etiqueta “*madurez del esquema*” para referirse a la fuerza o potencia de un esquema y se hace una analogía con el concepto de función. Si el proceso de construcción se reduce al registro algebraico y si este es el proceso que es encapsulado en un objeto, entonces el estudiante acaba con una concepción de función débil. Aquí la causa no es el fracaso del proceso de encapsulación, sino la encapsulación de un proceso que no era lo suficientemente rico. De igual manera, una persona puede tematizar un esquema que tiene una estructura coherente débil y, en consecuencia, está persona puede no ser capaz de aplicar ese esquema en situaciones nuevas. Por tanto, el esquema de una persona es la totalidad de conocimiento que para él o ella está conectado (consciente o inconscientemente) a un tema matemático particular. Una persona tendrá un esquema de función, un esquema de derivada, un esquema de grupo, etc. El esquema de una persona también puede incluir una colección de experiencias, impresiones, imágenes o expresiones verbales tales como “*Cada vez que veo este símbolo yo hago esto*”. Y se puede hablar, en consecuencia, de esquemas pobres, débiles, incoherentes y rígidos.

OBJETIVOS

En la implementación de la secuencia didáctica, nos proponemos el cumplimiento de los siguientes objetivos:

a) Comprender el concepto de integral como limite de una sucesión de sumas parciales. Tratar que adherir el concepto de integral a un conjunto de imágenes conceptuales.

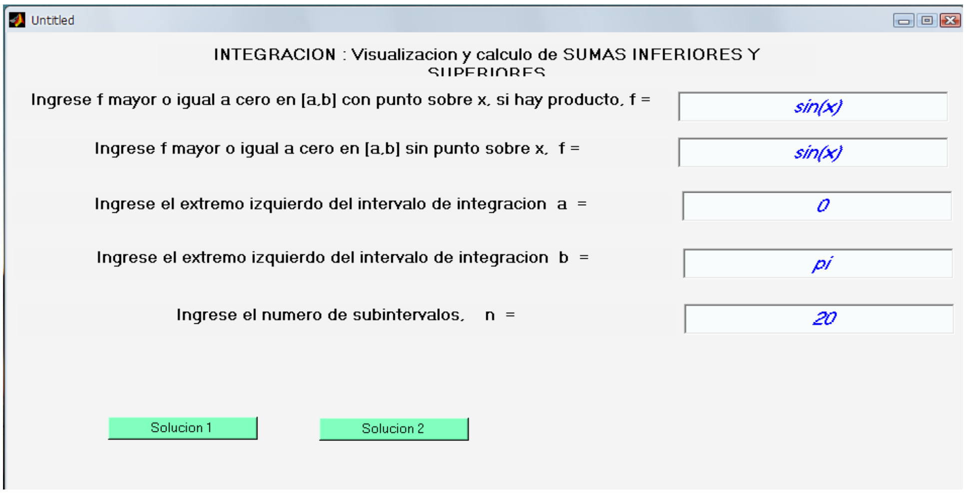
b) Relacionar el teorema fundamental de sucesiones, como uno de los ejes de la fundamentación teórica de la definición de integral. Construir el concept-image de una sucesión monótona y acotada que por lo tanto converge.
c) Validar empíricamente una aproximación didáctica para la enseñanza del concepto de integral, apoyada en la visualización, que facilite al alumno adquirir una comprensión básica de integración.
d) Visualizar la sucesión (S_n – s_n) que tiende a cero sii la función es integrable.

Para cumplir estos objetivos, utilizando la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface), diseñamos una secuencia para los alumnos de primer año que cursan Análisis Matemático I en las carreras de Ingeniería.

Presentamos las pantallas que se presentan cuando comenzamos con la secuencia:

PANTALLA PARA INTRODUCIR LOS DATOS

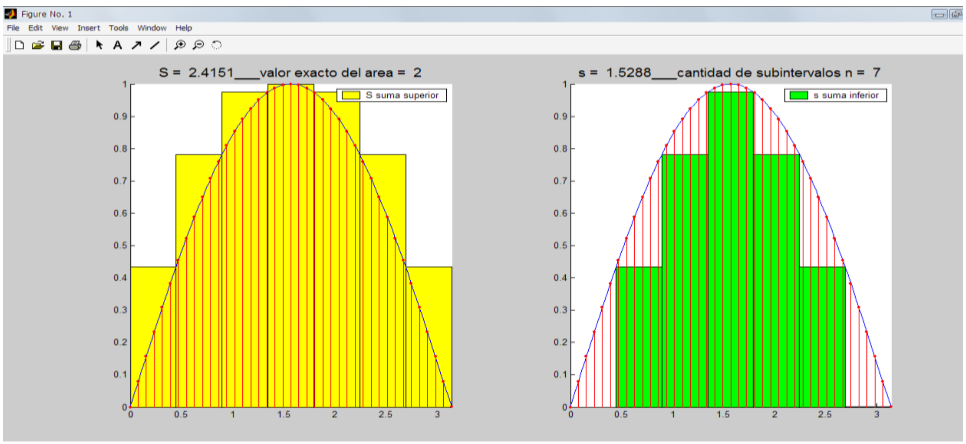
En esta pantalla el alumno carga los siguientes datos: función a integrar, intervalo de integración ingresando el extremo izquierdo y el derecho y la cantidad de subintervalos.



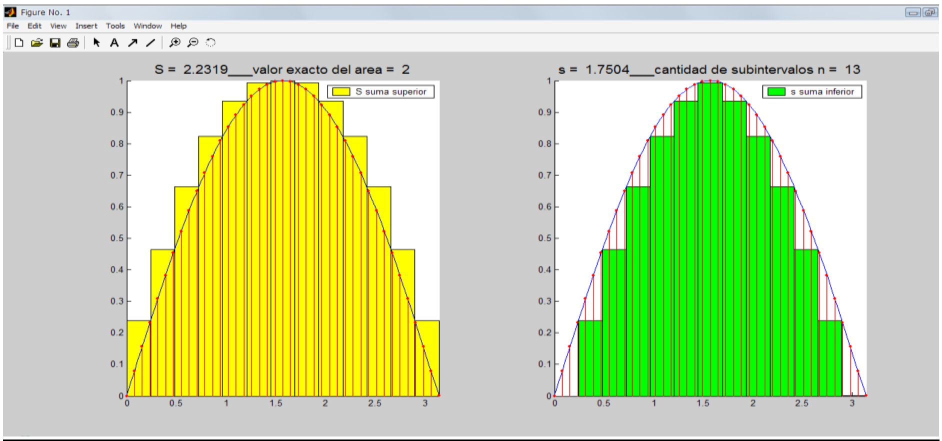
Dos botones solución. Al pulsar solución1 comienza a evolucionar el método de integración, si se pulsa solucion2 se despliega una **guía de actividades,** que contienen preguntas para desarrollar los contenidos propios del y **evaluar** la herramienta didáctica.

Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores correspondiente a 7 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi].

Puede visualizar la suma inferior s y la suma superior S, grafica y numéricamente, conjuntamente con la cantidad de subintervalos, y la **coordinación** de los distintos registros.

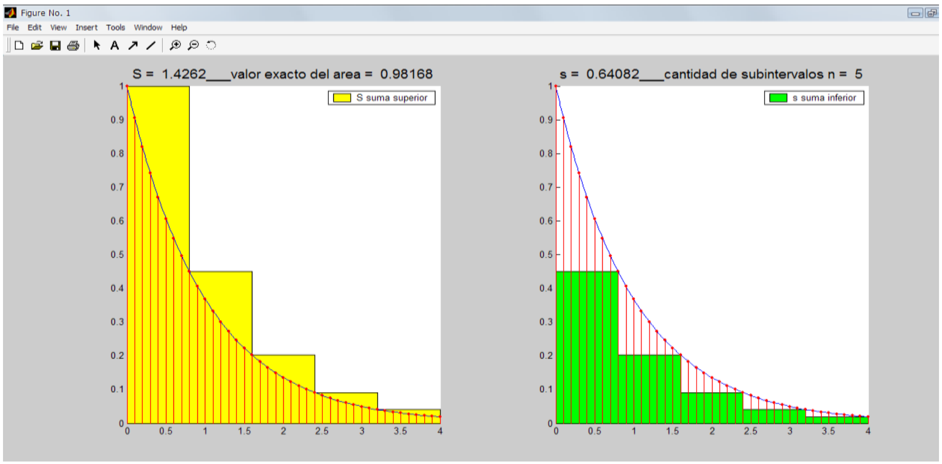


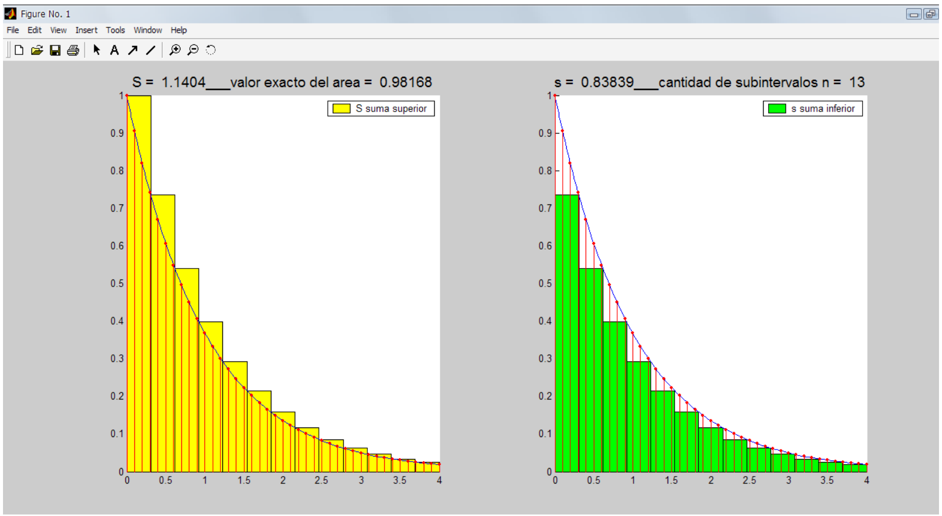
Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores correspondiente a 13 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi]. Pero el **hecho fundamental**, es que el alumno aprecia y pueda crear la **imagen conceptual** de la sucesión **monotona decreciente** de las sumas superiores y **monótona creciente** de las sumas inferiores.



Al cambiar el número de intervalos, los alumnos pueden observar en las pantallas en la parte de arriba, los valores numéricos de sumas superiores, inferiores y el valor exacto de la integral. De esta manera pueden concluir sobre el acercamiento de estas áreas al valor 2.

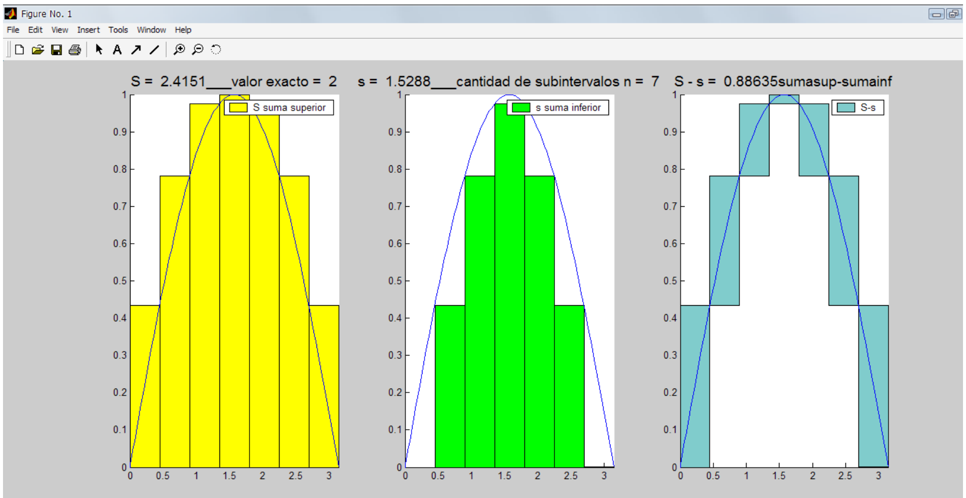
En la siguiente pantalla se han cambiado las funciones y el número de intervalos.
Pantalla que ilustra la Suma Superior y la Suma inferior de la función exp(-x) con n=5, n=13 subintervalos en el intervalo [0 4].

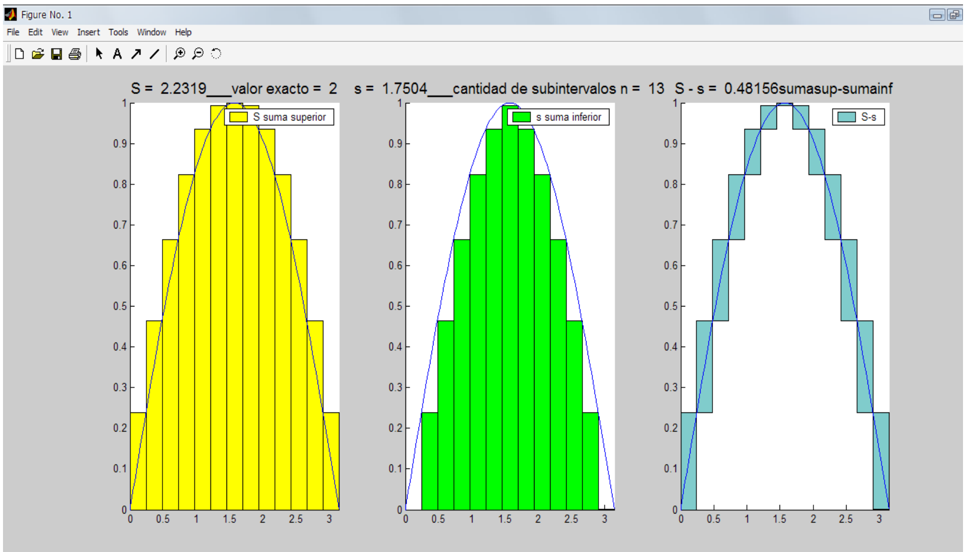




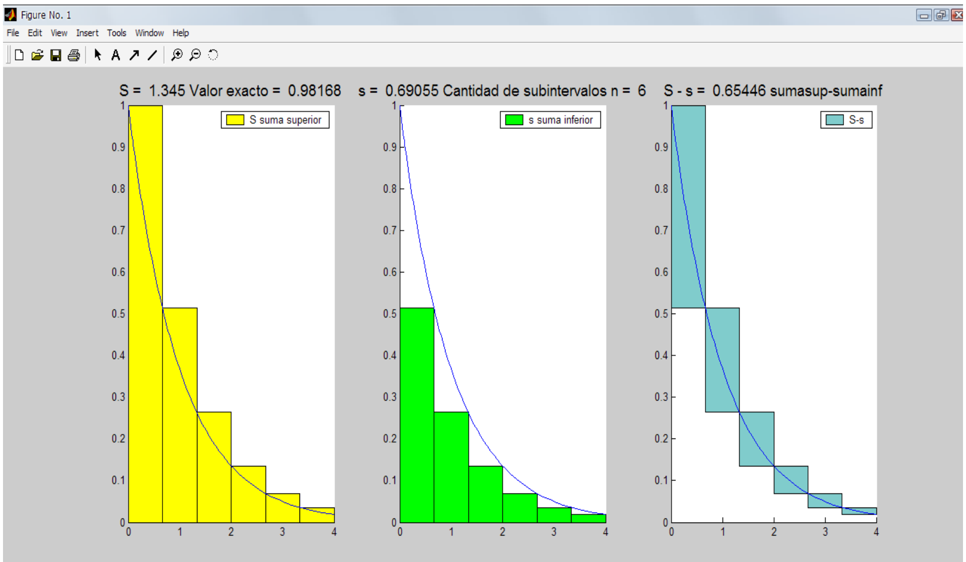
Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores S_n e inferiores s_n y la **diferencia (Sn – sn)** correspondiente a 7 y 13 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi]. Idem para la función exp(-x) para 5 y 13 subintervalos.

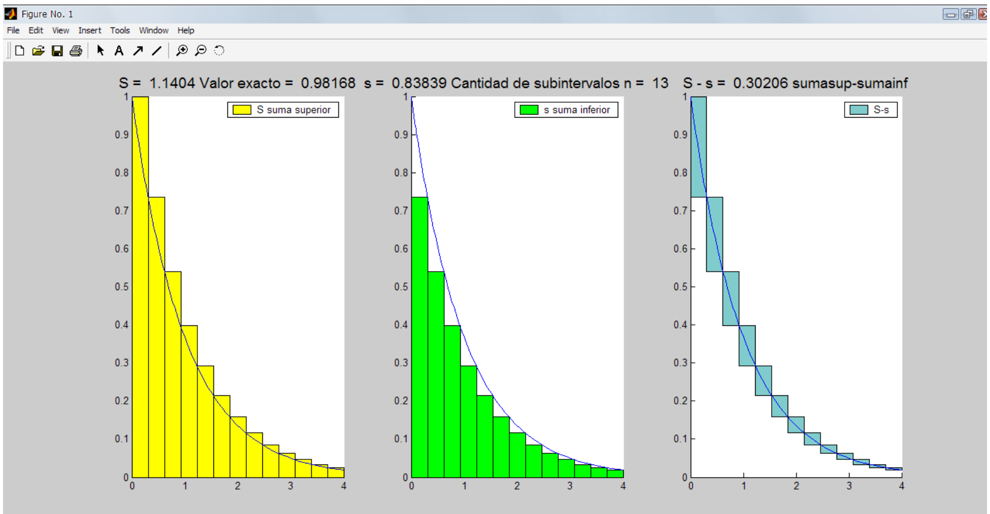
Estas visualización debe permitir la comprensión del hecho S_n-s_n→0.





PANTALLAS SUCESIVAS PARA DISTINTA CANTIDAD DE SUBDIVISIONES





GUIA DE ACTIVIDADES

La hoja de actividades que deben realizar es la que se transcribe a continuación:

A partir de la proyección de la interface gráfica de MATLAB, referida al <u>tema integración</u>, se solicita al alumno ingresar datos a la interface grafica y responder al siguiente cuestionario, que persigue como finalidad construir una **imagen conceptual:**

a) Ingresar la función $f(x) = e^{-x}$.

b) Ingresar el intervalo de integración [a, b] = [0, 4].

c) Ingrese la cantidad de subintervalos n=10. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

d) Ingrese la cantidad de subintervalos n=20. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

e) Ingrese la cantidad de subintervalos n=30. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

f) Ingresar la función f(x) = sin(x) y observar las sucesivas pantallas sin registrar los datos.

A partir de las actividades que deben realizar los alumnos, se les solicitará que respondan al siguiente cuestionario:

Cuestionario

1._ La altura de cada rectángulo correspondiente a una suma superior, esta dado por, el valor máximo (dentro del subintervalo) de f(x), por el valor medio o por el valor mínimo?

2._ La altura de cada rectángulo correspondiente a una suma inferior, esta dado por, el valor mínimo (dentro del subintervalo) de f(x), por el valor medio o por el valor máximo?

3._ Sea f(x) continua y positiva en [a,b]. A medida que el numero de subintervalos aumenta los valores numéricos correspondiente a la sucesión de sumas superiores, aumenta, disminuye, permanece constante u oscila? ¿Se aproxima al algún valor? Ídem para las sumas superiores.

4._ La sucesión numérica de sumas superiores es una sucesión monótona ……………………………………

5._ La sucesión numérica de sumas inferiores es una sucesión monótona ……………………………

6._ La sucesión numérica de sumas superiores esta ACOTADA, ver la GUI, no desciende debajo de cierto valor o desciende indefinidamente? ¿Por ejemplo, debajo de que valor no desciende?

7._ La sucesión numérica de sumas inferiores esta ACOTADA, ver la GUI, no supera cierto valor o asciende indefinidamente? ¿Por ejemplo, que valor menor que no sobrepasa?

8._ EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUCESIONES dice, toda sucesión monótona creciente (o decreciente) y acotada converge.

Si este es el caso en estudio, ¿estamos en presencia de un límite? ¿Cómo se llama este limite?

Obtenga la diferencia entre la suma superior y la suma inferior, esto es, $S_n - s_n$.

Hacia donde tiende esta diferencia, para valores crecientes de n?

9._ Del último ítem, y a partir de las imágenes de la visualización interactiva ¿Cómo se formaliza el límite cuando n tiende a infinito?

CONCLUSIONES

Con la secuencia que presentamos, los alumnos pueden visualizar de una manera sencilla, el acercamiento de las áreas calculadas al área real y la difícil comprensión del proceso de límite de una sucesión de sumas parciales, así como el carácter de sucesiones monótonas creciente o decreciente de las sumas parciales.

Que se puedan someter a la verificación interactiva los resultados predichos por la teoría, permiten afianzar la comprensión y fijar el concepto.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Actas del IV Simposio de la SEIEM.* España: Huelva.

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Hitt, F. (1998): Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, 10 (2), 23-45.

Llorens, J. L., Santonja, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), pp. 61-76.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-21.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics.* 12. pp. 151 – 169.